Brevet blanc des Collèges – Collège Saint-Joseph ETAPLES - ***Académie de Lille.***

La calculatrice personnelle est autorisée, mais **aucun matériel ne peut être prêté ou emprunté au voisin**. La qualité de la rédaction et celle de la présentation constituent des éléments importants d'appréciation de la copie, qui seront notés sur **4 points** (sur un total général de 40 points).

Sujet à rendre avec la copie

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES (12 points) :

EXERCICE 1: Calculer la valeur exacte de **A.** Calculer **B** et donner le résultat sous forme d'écriture scientifique. On n'oubliera pas de détailler les calculs sur la copie.

$$\mathbf{A} = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{9} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{B} = \frac{3 \times 10^{-4} \times 5 \times (10^2)^6}{25 \times 10^{-2}}$$

EXERCICE 2: On donne les trois nombres suivants :

$\mathbf{C} = \sqrt{200} - 3\sqrt{18}$ $\quad$ $\mathbf{D} = (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$ $\quad$ $\mathbf{E} = (2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)$

a) Ecrire **C** sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un entier.

b) Développer et réduire **D**.

c) Montrer que **E** est un nombre entier.

EXERCICE 3:

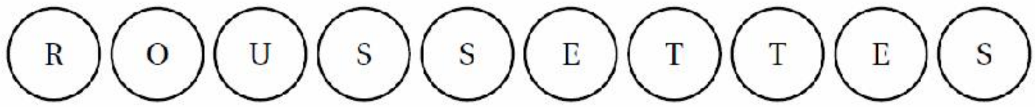
1. Calculer le PGCD de 220 et de 176.
2. Un ouvrier dispose de plaques de métal de 220 cm de longueur et de 176 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante :

« *Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.* »

Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?
Combien obtiendra-t-il de carrés par plaque ?

EXERCICE 4: La roussette rousse est une espèce de chauve souris, endémique au territoire de la Nouvelle-Calédonie. Elle était la mascotte officielle des XIVes Jeux du Pacifique de 2011.

Dans une urne, on a dix boules indiscernables au toucher portant les lettres du mot ROUSSETTES



On tire au hasard une boule dans cette urne et on regarde la lettre inscrite sur la boule.

1. Quels sont les six issues possibles à l'issue d'un tirage ?

2. Déterminer les probabilités suivantes :

a. la lettre tirée est un R.

b. la lettre tirée est un S.

c. la lettre tirée n'est pas un S.

3. Julie affirme qu'elle a plus de chance d'obtenir une voyelle qu'une consonne à l'issue d'un tirage. A-t-elle raison? Justifier votre réponse.

ACTIVITÉS GEOMETRIQUES (12 points) :

EXERCICE 1:

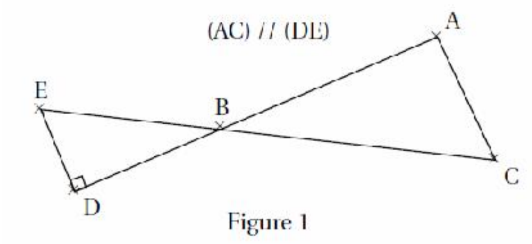


Figure 1

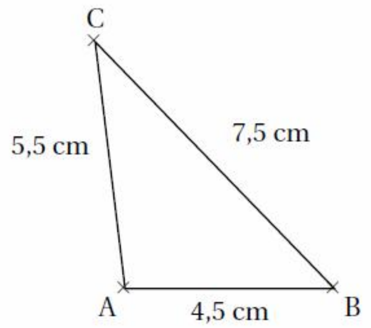
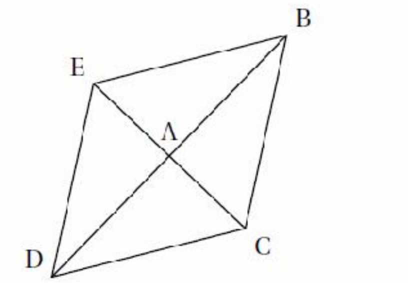


Figure 2



BCDE est un losange de centre A

Figure 3

Compléter le tableau donné en annexe sur la page 4 de ce sujet.

EXERCICE 2:

1. Construire un triangle ABC tel que : AB = 7,5 cm; BC = 10 cm et AC = 12,5 cm.

2. Prouver que le triangle ABC est rectangle en B.

3. a. Construire le point F appartenant au segment [AC] tel que CF = 5 cm.

b. Construire le point G appartenant au segment [BC] tel que CG = 4 cm.

4. Montrer que les droites (AB) et (FG) sont parallèles.

5. Montrer que la longueur FG est égale à 3 cm.

6. Les droites (FG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ? Justifier.

EXERCICE 3:

1. On réalise une maquette au 1/50 d'une voiture citroën Picasso.

La longueur de la maquette est de 8,6 cm et sa largeur de 3,5 cm

a. Quelle sont les longueur et largeur réelles de la voiture *(en mètre)* ?

b. L'aire du toit panoramique sur la maquette est 12 cm².

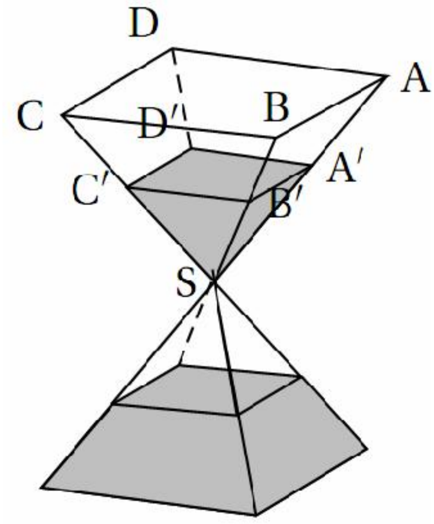
Quelle est l'aire réelle du toit *(en m²)*?

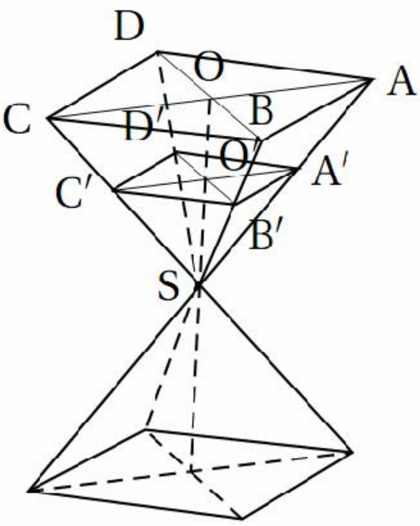
2. Un bébé baleine pèse 2 tonnes.

Combien pèse sa Maman sachant que ses dimensions *(longueur et rayon du corps)* sont quatre fois plus grandes que celles de son bébé ?

PROBLEME (12 points) :

Un sablier est constitué de deux pyramides superposées comme le montre le dessin ci-dessous.
Le sable s'écoule au niveau du point S. La surface du sable est représentée par le plan A'B'C'D' horizontal et parallèle aux bases des pyramides.
On suppose qu'au départ, le volume du sable occupe la totalité de la pyramide SABCD.





La pyramide SABCD est régulière, sa base est un carré ABCD, on rappelle que la hauteur (SO) est perpendiculaire au plan ABCD.
Le niveau du sable est repéré par la longueur SA' sur l'arête de la pyramide SABCD.
On donne : **OA** = 27 mm et **SO** = 120 mm.

On rappelle que le volume d'une pyramide est $\mathbf{V} = \dfrac{\textit{aire de Base x hauteur}}{3}$.

<u>Dans tout ce problème, A' est le milieu de [SA].</u>

1. Représenter la base ABCD en vraie grandeur.

2. a) Justifier que le triangle AOB est rectangle isocèle en O.
b) Montrer que le côté du carré ABCD est égal à AB = $27\sqrt{2}$ mm.

3. a) Calculer l'aire du carré ABCD.
b) En déduire que le volume *V* de la pyramide SABCD est 58 320 mm³.

4. Le triangle SOA est rectangle en O. Montrer que SA = 123 mm.

5. La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD.
a) Que peut-on dire des droites (OA) et (O'A') ?
b) Déterminer le coefficient de réduction $\dfrac{SO'}{SO}$.

6. On note *V* ' le volume de la pyramide SA'B'C'D'.
Calculer *V* '.

7. On admet que le volume du sable descendu est proportionnel au temps écoulé.
Tout le sable s'écoule en 4 minutes.
Au bout de combien de temps le niveau de sable est-il dans la position étudiée ?

DOCUMENT RÉPONSE À RENDRE AVEC VOTRE COPIE

ANNEXE

Nom : **Prénom :** **Classe :**

	Figure 1	Figure 2	Figure 3
Le triangle ABC est rectangle en A ?	☐ Oui ☐ Non	☐ Oui ☐ Non	☐ Oui ☐ Non
Numéro(s) de la ou des propriétés permettant de le prouver			

Liste des propriétés :

1. Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales ont le même milieu et sont perpendiculaires.
2. Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
3. Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle *(contraposée de Pythagore)*
4. Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à 180 °.
5. Si deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.
6. Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.
7. Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est l'angle opposé au plus grand côté *(réciproque de Pythagore).*

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES (12 points) :

EXERCICE 1: Calculer la valeur exacte de **A.** Calculer **B** et donner le résultat sous forme d'écriture scientifique. On n'oubliera pas de détailler les calculs sur la copie.

$$\mathbf{A} = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{9} \qquad = \frac{12}{5} - \frac{7}{15} = \frac{36}{15} - \frac{7}{15} = \frac{29}{15}$$ ***(1,5 pt)***

$$\mathbf{B} = \frac{3 \times 10^{-4} \times 5 \times (10^2)^6}{25 \times 10^{-2}} = \frac{15 \times 10^{-4} \times 10^{12}}{25 \times 10^{-2}} = \frac{3 \times 10^{8}}{5 \times 10^{-2}} = 0{,}6 \times 10^{10} = 6\,000\,000\,000 = 6 \,.\, 10^{9}$$ ***(1,5 pt)***

EXERCICE 2: On donne les trois nombres suivants :

$\mathbf{C} = \sqrt{200} - 3\sqrt{18}$ $\qquad$ $\mathbf{D} = (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$ $\qquad$ $\mathbf{E} = (2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)$

Ecrire **C** sous la forme a$\sqrt{2}$ où a est un entier.

$$\mathbf{C} = \sqrt{200} - 3\sqrt{18} = \sqrt{100 \times 2} - 3\sqrt{9 \times 2} = 10\sqrt{2} - 3 \times 3\sqrt{2} =$$
$$10\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 10\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 1\sqrt{2}$$ ***(1 pt)***

Développer et réduire **D**.

$$\mathbf{D} = (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{5} = 3 + 5 - 2\sqrt{15} = 8 - 2\sqrt{15}$$ ***(1 pt)***

Montrer que **E** est un nombre entier.

$$\mathbf{E} = (2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1) = (2\sqrt{3})^2 - 1^2 = 4 \times 3 - 1 = 12 - 1 = 11$$ ***(1 pt)***

EXERCICE 3:

1. Calculer le PGCD de 220 et de 176.

PGCD(220 ;176) = **44** quelle que soit la méthode ***(1,5 pt)***

2. Un ouvrier dispose de plaques de métal de 220 cm de longueur et de 176 cm de largeur. Il a reçu la consigne suivante :

« *Découper dans ces plaques des carrés tous identiques, les plus grands possibles, de façon à ne pas avoir de perte.* »

Quelle sera la longueur du côté d'un carré ?

Le côté du carré doit être un diviseur commun de 220 et 176. Le plus grand possible sera le PGCD donc **44 cm** ***(0,5 pt)***

Combien obtiendra-t-il de carrés par plaque ?

Il y aura 5 carrés sur la longueur et 4 sur la largeur donc **20** *carrés par plaque* ***(1 pt)***

EXERCICE 4: La roussette rousse est une espèce de chauve souris, endémique au territoire de la Nouvelle-Calédonie. Elle était la mascotte officielle des XIVes Jeux du Pacifique de 2011.

Dans une urne, on a dix boules indiscernables au toucher portant les lettres du mot ROUSSETTES

R O U S S E T T E S

On tire au hasard une boule dans cette urne et on regarde la lettre inscrite sur la boule.

1. Quels sont les six issues possibles à l'issue d'un tirage ?

Issues possibles = **{E ;O ;U ;R ;S ;T}** ***(1 pt)***

2. Déterminer les probabilités suivantes :

a. la lettre tirée est un R.

Il y a 10 tirages possibles et un seul favorable :

p (« la lettre tirée est un R »)=**1/10 = 0,1** ***(0,5 pt)***

b. la lettre tirée est un S.

Il y a 10 tirages possibles et 3 sont favorables :

p (« la lettre tirée est un S »)=**3/10 = 0,3** ***(0,5 pt)***

c. la lettre tirée n'est pas un S.

Il y a 10 tirages possibles et 7 sont favorables :

p (« la lettre tirée n'est pas un S »)= **7/10 = 0,7** ***(0,5 pt)***

On peut aussi dire que c'est l'événement contraire au précédent !.

3. Julie affirme qu'elle a plus de chance d'obtenir une voyelle qu'une consonne à l'issue d'un tirage. A-t-elle raison? Justifier votre réponse.

Il y a 4 voyelles et 6 consonnes.

Donc Julie a plus de chance d'obtenir une consonne. **Elle a Faux !** ***(0,5 pt)***

ACTIVITÉS GEOMETRIQUES (12 points) :

EXERCICE 1: ***(3 pt)***

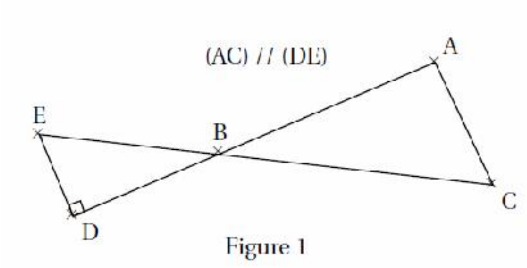


Figure 1

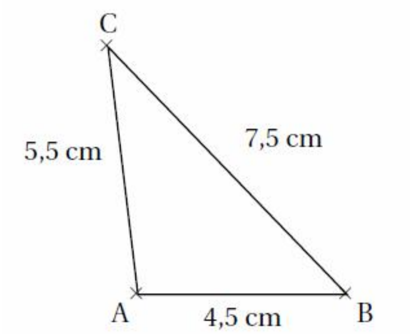


Figure 2

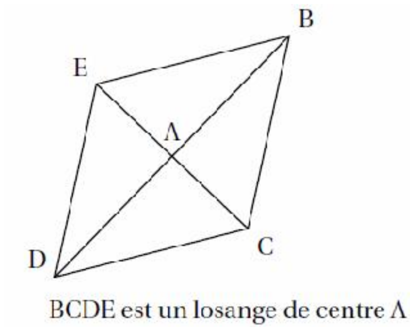


Figure 3

Compléter le tableau donné en annexe sur la page 4 de ce sujet.

3 pts (1pt par figure)

	Figure 1	Figure 2	Figure 3
Le triangle ABC est rectangle en A ?	☒ Oui ☐ Non	☐ Oui ☒ Non	☒ Oui ☐ Non
Numéro(s) de la ou des propriétés permettant de le prouver	5	3	1

EXERCICE 2: ***(6 pt)***

1. Construire un triangle ABC tel que : AB = 7,5 cm; BC = 10 cm et AC = 12,5 cm. ***(0,5 pt)***

2. Prouver que le triangle ABC est rectangle en B. ***(1,5 pt)***

D'une part, **AC^2 =** $12{,}5^2$ = **156,25** *{AC est le plus grand côté}*

D'autre part, **$BC^2 + AB^2$ =** $10^2 + 7{,}5^2 = 100 + 56{,}25$ = **156,25**

Comme **$AC^2 = BC^2 + AB^2$**, le triangle ABC est rectangle en B *(réciproque de pythagore)*

3. a. Construire le point F appartenant au segment [AC] tel que CF = 5 cm. ***(0,25 pt)***

b. Construire le point G appartenant au segment [BC] tel que CG = 4 cm. ***(0,25 pt)***

4. Montrer que les droites (AB) et (FG) sont parallèles. ***(1,5 pt)***

Les points A,F,C et B,G,C sont alignés dans le même ordre.

$$\frac{CF}{CA} = \frac{5}{12{,}5} = 0{,}4 \quad \text{et} \quad \frac{CG}{CB} = \frac{4}{10} = 0{,}4\,.$$

Comme $\frac{CF}{CA} = \frac{CG}{CB}$, ceci prouve, d'après la réciproque du théorème de Thalès, que les droites (FG) et (AB) sont parallèles.

5. Montrer que la longueur FG est égale à 3 cm. ***(1 pt)***

Puisque les droites (FG) et (AB) sont parallèles *(question précédente),* nous pouvons utiliser le théorème direct de Thalès dans le triangle ABC, avec les parallèles (FG) et (AB).

$\frac{CG}{CB} = \frac{FG}{AB}$ Soit $\frac{4}{10} = \frac{FG}{7{,}5}$ et FG x 10 = 4 x 7,5 donc FG = 30/10 = 3 cm

6. Les droites (FG) et (BC) sont-elles perpendiculaires ? Justifier. ***(1 pt)***

Les droites (AB) et (FG) sont parallèles.

La droite (BC) qui est perpendiculaire à (AB) est donc aussi perpendiculaire à (FG)

EXERCICE 3: ***(3 pt)***

1. On réalise une maquette au 1/50 d'une voiture citroën Picasso.

La longueur de la maquette est de 8,6 cm et sa largeur de 3,5 cm

a. Quelle sont les longueur et largeur réelles de la voiture *(en mètre)* ? ***(0,5 + 0,5 pt)***

L = 8,6 x 50 = 430 cm ou **4,30 m** et l = 3,5 x 50 = 175 cm ou **1,75 m**

b. L'aire du toit panoramique sur la maquette est 12 cm².
Quelle est l'aire réelle du toit *(en m²)*?

Si des longueurs se multiplient par 50 alors les aires se multiplient par 50^2 = 2500

Donc l'aire réelle du toit mesure 12 x 50^2 = 12 x 2500 = 30 000 cm² = **3 m²** ***(1 pt)***

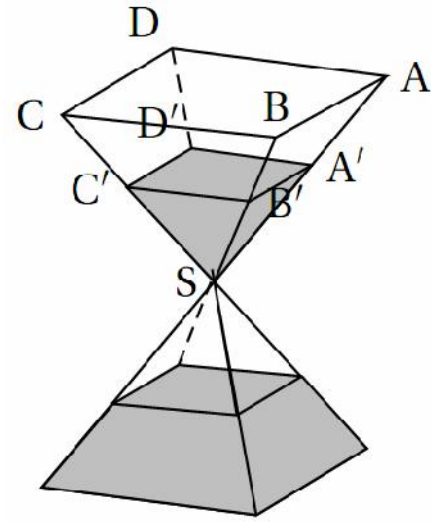
2. Un bébé baleine pèse 2 tonnes.
Combien pèse sa Maman sachant que ses dimensions *(longueur et rayon du corps)* sont quatre fois plus grandes que celles de son bébé ?

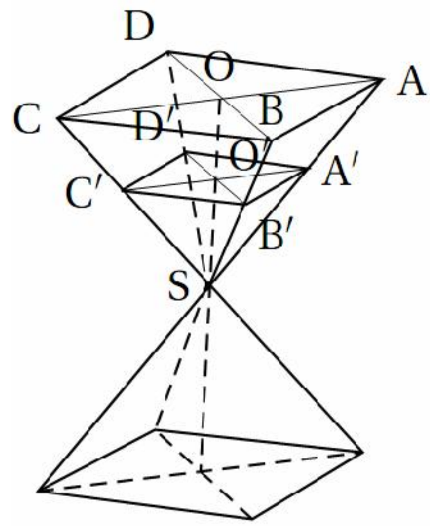
Si des longueurs se multiplient par 4 alors les volumes se multiplient par 4^3 = 64.

Donc Maman Baleine pèse 2 x 4^3 = 2 x 64 = **128 tonnes** ***(1 pt)***

PROBLEME (12 points) :

Un sablier est constitué de deux pyramides superposées comme le montre le dessin ci-dessous.
Le sable s'écoule au niveau du point S. La surface du sable est représentée par le plan A'B'C'D' horizontal et parallèle aux bases des pyramides.
On suppose qu'au départ, le volume du sable occupe la totalité de la pyramide SABCD.





La pyramide SABCD est régulière, sa base est un carré ABCD, on rappelle que la hauteur (SO) est perpendiculaire au plan ABCD.
Le niveau du sable est repéré par la longueur SA' sur l'arête de la pyramide SABCD.
On donne : **OA** = 27 mm et **SO** = 120 mm.

On rappelle que le volume d'une pyramide est $\mathbf{V} = \dfrac{\textit{aire de Base x hauteur}}{3}$.

<u>Dans tout ce problème, A' est le milieu de [SA].</u>

1. Représenter la base ABCD en vraie grandeur. ***(1 pt)***

2. a) Justifier que le triangle AOB est rectangle isocèle en O.

ABCD est un carré de centre O. Un carré a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, ont la même longueur (rectangle) et sont perpendiculaires (losange). Donc AO = BO et (AO) $\perp$ (OB).

Le triangle AOB est donc isocèle rectangle . ***(1,5 pt)***

b) Montrer que le côté du carré ABCD est égal à AB = $27\sqrt{2}$ mm.

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle AOB, rectangle en O, on obtient :
$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 27^2 + 27^2 = 729 + 729 = 1458$

AB = $\sqrt{1458} = \sqrt{729 \times 2} = \sqrt{729}\sqrt{2} = 27\sqrt{2}$ ***(1,5 pt)***

3. a) Calculer l'aire du carré ABCD.

Aire = (côté)² = AB² = $(27\sqrt{2})^2 = 27^2 \times (\sqrt{2})^2 = 729 \times 2 =$ **1458 mm²** ***(1 pt)***

b) En déduire que le volume *V* de la pyramide SABCD est 58 320 mm³.

V = (aire base) x hauteur /3 = 1458 x 120 /3 = 58 320 mm³ ***(1 pt)***

4. Le triangle SOA est rectangle en O. Montrer que SA = 123 mm.

En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle SOA, rectangle en O, on obtient :

$SA^2 = SO^2 + OA^2 = 120^2 + 27^2 = 14\,400 + 729 = 15\,129$

$SA = \sqrt{15129}$ = **123 mm** *(1 pt)*

5. La pyramide SA'B'C'D' est une réduction de la pyramide SABCD.

a) Que peut-on dire des droites (OA) et (O'A') ?

Les droites (OA) et (O'A') sont parallèles. *(1 pt)*

b) Déterminer le coefficient de réduction $\frac{SO'}{SO}$.

D'après Thalès dans le triangle SOA, avec les parallèles (OA) et (O'A'), on a :

$\frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{1}{2} = k$ *(1,5 pt)*

6. On note *V* ' le volume de la pyramide SA'B'C'D'.

Calculer V' = V x k³ = 58 320 x (1/2) ³ = 58 320 x(1/8) = 7 290 mm³ *(1 pt)*

7. On admet que le volume du sable descendu est proportionnel au temps écoulé.

Tout le sable s'écoule en 4 minutes.

Au bout de combien de temps le niveau de sable est-il dans la position étudiée ?

Comme il reste 1/8 du volume dans le sablier (V') c'est qu'il s'est écoulé les 7/8 du temps.

Ainsi 7/8 de 4 minutes est égal à 7/8 de 240 secondes,

soit $\frac{7 \times 240}{8}$ = **210 secondes ou 3 minutes 30 secondes** *(1,5 pt)*